Filo-Sofija
Nr 37 (2017/2/II), s. 95-106
ISSN 1642-3267
Z PROBLEMÓW WSPÓŁ-
CZESNEJ FILOZOFII (V)

Elżbieta Kałuszyńska
Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie

Liczba, wielkość, miara

> Wszystko, co dzieje się w matematyce, prędzej czy później ma swoje miejsce w fizyce[1].
>
> *Michał Heller*

1.

We wstępnym rozdziale książki Franka Wilczka *Piękne pytanie* znajdujemy:

> Pitagoras odkrył w swoim słynnym twierdzeniu o trójkącie prostokątnym najbardziej podstawowy związek między liczbami z jednej strony a rozmiarami i figurami z drugiej. Ponieważ Liczba jest najczystszym wytworem Umysłu, a Rozmiar jest podstawową cechą charakterystyczną dla Materii, dzięki temu odkryciu poznaliśmy ukrytą jedność Umysłu i Materii.[2]

Entuzjazm Franka Wilczka jest uroczy i zaraźliwy, jednak zalecam ostrożność. Nie wszyscy bowiem podpisaliby się pod tą deklaracją. Znakomity matematyk Ian Stewart wydaje się mieć odmienne zdanie:

> Liczba nie jest czymś, co można wskazać w świecie fizycznym. Jest abstrakcją, pojęciem wymyślonym przez człowieka, które zostało wywiedzione z rzeczywistości, ale samo rzeczywiste nie jest […] cała matematyka jest abstrakcją.[3]

We wcześniejszej pracy uchyla się jednak od tak kategorycznej odpowiedzi:

> Być może matematyka jest dlatego efektywna, ponieważ reprezentuje podstawowy język ludzkiego mózgu. Może jedyne wzorce, które możemy spostrzegać, to wzorce matematyczne, bo matematyka jest narzędziem naszej percepcji. […] Być może nie ma rzeczywistych struktur, a są jedynie te, które sami narzucamy w swym umysłowym ograniczeniu. Są to pytania dla filozofów.

Dodaje jednak:

---

[1] M. Heller, *Filozofia Przypadku*, Copernicus Center Press Sp. z o.o., Kraków 2014, s. 194.

[2] F. Wilczek, *Piękne pytanie*, przeł. B. Bieniok, E.L. Łokas, Prószyński i S-ka, Warszawa 2016, s. 14.

[3] I. Stewart, *Niezwykłe liczby profesora Stewarta*, przeł. B. Bieniok, E.L. Łokas, Prószyński i S-ka, Warszawa 2016, s. 22, 23.

> Pragmatyczna rzeczywistość jest taka, że matematyka jest najbardziej efektywną i godną zaufania metodą, jaką znamy, dla zrozumienia tego, co widzimy dookoła nas.[4]

Inaczej widzi tę kwestię Roger Penrose, który wskazując zbiór Mandelbrota, stwierdza:

> […] nikt, nawet sam Benoit Mandelbrot, gdy pierwszy raz dostrzegł niewiarygodną złożoność detali tego zbioru, nie przeczuwał, jakie bogactwo w sobie zawiera. Z całą pewnością zbiór Mandelbrota nie został wymyślony przez człowieka. Zbiór ten należy w sposób obiektywny do samej matematyki. Jeśli w ogóle ma sens mówienie o istnieniu zbioru Mandelbrota, to nie jest on jakąś formą istnienia w naszych umysłach, ponieważ nikt nie jest w stanie zdać sobie sprawy z jego nieskończonej różnorodności i nieograniczonej komplikacji. To istnienie nie może też być przypisane zbiorowi wydruków komputerowych, które próbują przedstawić niewyobrażalną wymyślność jego szczegółów. […] Jednak jego istnienie nie ulega wątpliwości, ponieważ gdy dokładniej go badamy, odnajdujemy tę samą strukturę we wszystkich jej zauważalnych detalach, tylko z coraz większą precyzją szczegółu, i jest to niezależne od matematyka czy od komputera, za pomocą którego go badamy. Może to być tylko istnienie w platońskim świecie idei matematycznych.[5]

Jeszcze bardziej radykalne jest stanowisko Maxa Tegmarka, który twierdzi, iż: „Nasza zewnętrzna fizyczna rzeczywistość jest strukturą matematyczną”[6]. Uzasadnia ten pogląd następująco:

> […] istnieje coś bardziej podstawowego od naszej trójwymiarowej przestrzeni i zawartych w niej cząstek: funkcja falowa i nieskończenie wymiarowa przestrzeń Hilberta, w której ona przebywa. Cząstki mogą powstawać i ulegać zniszczeniu, mogą być też w kilku miejscach naraz, natomiast funkcja falowa była, jest i będzie tylko jedna. Funkcja ta przemierza przestrzeń Hilberta, tak jak opisuje to równanie Schrödingera, z tym, że zarówno funkcja falowa, jak i przestrzeń Hilberta są obiektami czysto matematycznymi.[7]

Stanowisko Wilczka i Tegmarka jest czymś stosunkowo nowym w dyskusji na temat statusu ontologicznego matematyki, natomiast Penrose i Steward wpisują się w toczony od dawna spór między platonikami – którzy postulują obiektywne istnienie rzeczywistości matematycznej, odkrywanej jedynie przez matematyków, a konstruktywistami – dla których matematyka jest wspólnym dziełem wielu pokoleń matematyków stosujących precyzyjne, sprawdzone metody definiowania pojęć i dowodzenia twierdzeń[8].

---

[4] I. Stewart, *Czy Bóg gra w kości*, przeł. M. Tempczyk, W. Komar, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1994, s.12.

[5] R. Penrose, *Droga do rzeczywistości*, przeł. J. Przystawa, Prószyński i S-ka, Warszawa 2007, s. 15-16.

[6] M. Tegmark, *Nasz matematyczny wszechświat*, przeł. B. Bieniok, E.L. Łokas, Prószyński i S-ka, Warszawa 2015, s. 369.

[7] *Ibidem*, s. 368.

[8] Problem ontologicznego statusu matematyki podejmowałam w pracy: E. Kałuszyńska, *Język a rzeczywistość. Performatywna funkcja języka*, „Filozofia Nauki” 2008, nr 2, s. 5-14. Wykorzystam tu częściowo zawarte tam ustalenia.

2.

Rozważmy najpierw zasadność argumentów wysuwanych przez Penrose'a na rzecz istnienia platońskiego świata idei matematycznych. Wskazując zbiór Mandelbrota, Penrose chce nas przekonać, że: (i) konstrukcje matematyczne są tak bogate, że nie mogą w żaden sposób istnieć w naszych umysłach; (ii) mogą być one obiektywnie badane i ujawniać bogatą, nieprzeczuwalną wcześniej strukturę.

Nie są to argumenty zniewalające. Zauważmy bowiem, że zbiór Mandelbrota, choć tak skomplikowany, zadany jest za pomocą bardzo prostej transformacji punktu na płaszczyźnie zespolonej Wessela:

$$z \longmapsto z^2 + c,$$

gdzie c jest pewną wybraną, ustaloną liczbą zespoloną. Po ustaleniu c możemy śledzić drogę pewnego punktu z (np. $z = 0$) wyznaczoną tą transformacją. W zależności od c albo punkt ten oddala się od środka układu (sekwencja nieograniczona), albo pozostaje stale wewnątrz koła o środku w początku układu współrzędnych (sekwencja ograniczona). Zbiór Mandelbrota tworzą te punkty c, które prowadzą do sekwencji ograniczonych[9].

Nikt oczywiście nie ma „w umyśle" zbioru Mandelbrota, choć z łatwością „pomieści" regułę wyznaczającą transformację. Podobnie jak nikt nie ma „w umyśle" wszystkich partii czy problemów szachowych, choć reguły gry w szachy są proste. Tak samo jest z wieloma innymi grami badanymi skrupulatnie przez teoretyków (często matematyków), którym udaje się odkrywać obiektywne fakty i prawidłowości w przebiegu tych gier. Nikt jednak nie upiera się przy twierdzeniu o istnieniu „platońskiego świata gier". Ich konwencjonalny charakter nie budzi raczej wątpliwości. Tak więc obiektywne badanie wykreowanej rzeczywistości, dokonywanie zaskakujących odkryć, nie tylko jest możliwe, ale jest faktem. Już Hertz zauważył, że ,,równania są mądrzejsze od tych, którzy je napisali". To tyle „w temacie" bogactwa konstrukcji matematycznych.

W drugim punkcie argumentacji Penrose stwierdza, iż konstrukcje te mogą być obiektywnie badane. Badania takie powinny więc prowadzić do zdobywania prawdziwej wiedzy o tych konstrukcjach. Do platońskiego świata idei, nawet tylko idei matematycznych, nie mamy jednak bezpośredniego dostępu, nie możemy więc stwierdzić o istniejącym, że jest, o nieistniejącym, że nie jest – jak zalecał Arystoteles. Wprawdzie Tarski sformułował konieczne warunki, jakie muszą być spełnione, aby dla pewnego języka można było zdefiniować pojęcie prawdy, jednak wymaga to odwołania do teorii mnogości. Teoria mnogości traktowana jest jako ontologia matematyki.

[9] R. Penrose, *op. cit.*, s. 81-82.

To ona decyduje o tym, „co jest", a „co nie jest" w matematyce. A przecież są różne ujęcia teorii mnogości[10], nadto nie sposób udowodnić niesprzeczności żadnego z tych ujęć.

Oba więc argumenty Penrose'a wydają się bezzasadne; na ich postawie nie sposób oprzeć kryterium oddzielającego świat wykreowany („przy użyciu słów") od świata istniejącego obiektywnie w platońskim sensie.

Argumenty konstruktywistów dla wielu matematyków czy „użytkowników" matematyki brzmią przekonująco. Faktycznie, rzeczywistość matematyczna zdaje się zawdzięczać swe istnienie wyłącznie (s)twórczemu NIECH … BĘDZIE matematyków. W otwartej na chybił trafił pracy z zakresu matematyki znajdziemy sformułowania typu: „Niech *X* będzie zbiorem wszystkich ciągów o wyrazach będących liczbami wymiernymi spełniających warunek zbieżności Cauchy'ego"[11]. Według konstruktywistów każda taka wypowiedź, jeśli nie jest sprzeczna, powołuje do istnienia jakiś obiekt matematyczny, w tym przypadku zbiór *X* o zadanych własnościach. Obiekty te wraz z całą siecią wzajemnych powiązań – już odkrytych bądź czekających na odkrycie – tworzą matematyczną rzeczywistość. Jest to rzeczywistość przebogata, zwarta dzięki współzależności różnego typu bytów matematycznych, niewyczerpalna, ciągle zaskakująca matematyków nowymi własnościami, możliwościami uogólnień i powiązań, otwierających nowe pola badawcze. Jest to przy tym rzeczywistość sztywna. Nie ma tu przygodności: i fakty, i prawa (twierdzenia) mają walor konieczności. Jedynym ograniczeniem jest wymóg n i e s p r z e c z n o ś c i całego systemu. I tu pojawia się problem: Kurt Gödel udowodnił twierdzenie „o niemożliwości podania dowodu niesprzeczności systemów zawierających arytmetykę wyłącznie za pomocą środków tych systemów"[12]. Andrzej Grzegorczyk podsumowuje rzecz następująco:

> Wiara w niesprzeczność podstawowych teorii matematycznych opiera się więc na dedukcyjnym doświadczeniu wielu pokoleń matematyków, którzy na sprzeczność się nie natknęli, oraz na pewnej intuicyjnej przejrzystości podstawowych matematycznych pojęć.[13]

3.

Pozostała jeszcze jedna płaszczyzna rozważań. Wyznacza ją ta „n i e d o r z e c z n a s k u t e c z n o ś ć m a t e m a t y k i"[14] w opisywaniu rzeczywistości przyrodniczej zarówno na poziomie budowania modeli wyjaśniających, jak i na poziomie

[10] Zermelo-Fraenkla-Skolema, Qiune'a, von Neumanna-Bernaysa-Gödla.

[11] H. Rasiowa, *Wstęp do matematyki współczesnej*, PWN, Warszawa 1968, s. 90.

[12] *Mała encyklopedia logiki*, Ossolineum, Wrocław – Warszawa – Kraków 1970, s. 335. Jest to tzw. „drugie twierdzenie Gödla".

[13] A. Grzegorczyk, *Zarys logiki matematycznej*, PWN, Warszawa 1969, s. 253.

[14] Znane powiedzenie Eugene Wignera.

inżynieryjnym, technologicznym. Tej skuteczności nie wyjaśnia zadowalająco żadna z przeciwstawnych koncepcji. A jest faktem. Co więcej, na najgłębszym poziomie rzeczywistości matematyka jest często jedynym dostępnym narzędziem badawczym.

Ten sposób docierania do prawdy o rzeczywistości ma długą historię. Na przykład, a jest to jeden z wielu przykładów, w latach 30. XX w. Wolfgang Pauli dla wyjaśnienia nieregularności w rozpadzie *beta* postulował istnienie cząstki, której Enrico Fermi nadał nazwę *neutrino*, a której istnienie potwierdzono eksperymentalnie ćwierć wieku później. Podobnie było z postulowaniem przez Paula Diraca w 1928 r. istnienia *pozytonu* – antycząstki elektronu, pierwszej odkrytej cząstki antymaterii. Na jej ślad wskazywało drugie rozwiązanie równania opisującego stan elektronu z uwzględnieniem efektów relatywistycznych. Odkrycie w roku 1932 pozytonu w promieniowaniu kosmicznym przyniosło Carlowi Andersonowi Nagrodę Nobla. „Czasami okazuje się, że ta cała wyższa matematyka ma jednak coś wspólnego z rzeczywistością”[15] – skwitował to wydarzenie Dave Goldberg.

Nie zawsze genialne odkrycia są odpowiednio docenione. Już w latach 20. ubiegłego wieku Emmy Noether udowodniła twierdzenie, które wiąże niezmienniczość twierdzeń ze względu na określoną ciągłą transformację symetrii czasoprzestrzennych (przesunięcie w czasie, w przestrzeni, obroty) z prawami zachowania (energii, pędu, momentu pędu). Twierdzenie Noether zyskało uznanie w środowisku i matematyków, i fizyków, miało również znaczny filozoficzny „ciężar gatunkowy”, jednak nie zapoczątkowało żadnej rewolucji. Wykazano bowiem, że trzy wskazane transformacje czasoprzestrzenne wyczerpują wszystkie możliwości.

Wagę tego odkrycia doceniono dopiero wtedy, gdy udowodniono, iż jest tak tylko przy założeniu, że po dowolnej transformacji symetrii *fermiony* pozostają fermionami, a *bozony* – bozonami. Natomiast „s u p e r s y m e t r i a jest ideą, zgodnie z którą prawa przyrody nie ulegają zmianie po zastąpieniu f e r m i o n ó w b o z o n a m i ”[16]. Okazało się wtedy, że jest to potężne narzędzie.

> Przypuśćmy – *pisze Jim Baggot* – że mamy jakąś wielkość fizyczną, która – jak się wydaje – podlega zachowaniu, ale dla której nie mamy jeszcze decydujących o tym praw. O ile ta wielkość jest faktycznie zachowywana, to prawa te – jakiekolwiek by one były – muszą być inwariantne względem pewnej szczególnej ciągłej transformacji symetrii. Jeśli tylko uda nam się odkryć, jaka to symetria, to będziemy na dobrej drodze do ustalenia matematycznej postaci samych praw.[17]

[15] D. Goldberg, *Wszechświat w lustrzanym odbiciu*, przeł. T. Krzysztoń, Prószczyński i S-ka, Warszawa 2015 (cyt. Kindle: *loc*. 434–449).

[16] J. Baggot*, Pożegnanie z rzeczywistością*, Prószyński i S-ka, Warszawa 2016, s. 214.

[17] *Ibidem*, s. 206.

Laureat Nagrody Nobla Phil Anderson ujął to zwięźle: „Powiedzenie, że fizyka bada symetrie, to tylko lekka przesada"[18]. Brzmi to ironicznie, ale metoda ta nie zawiodła! Powstało wiele – często konkurujących – teorii „meblujących" najniższy poziom materii (np. teoria strun, bran, supersymetrii, wieloświatów). Wprawdzie środowisko naukowców podzielił metodologiczny spór między popperazi, czyli tymi, którzy przypominają o konieczności empirycznego potwierdzenia teorii, a zwolennikami – jak mówią ich przeciwnicy – teorii baśniowych[19], to jednak ostatnie spektakularne sukcesy empiryków obniżają temperaturę sporu. Detekcja bozonu Higgsa, fal grawitacyjnych czy coraz dokładniejsze mapy mikrofalowego tła – pozostałości po Wielkim Wybuchu, osłabiają argumenty „popperazich". Zwiększanie mocy akceleratorów, umieszczanie w kosmosie sond i stacji badawczych znacząco zwiększa możliwości weryfikacji teoretycznych przewidywań. Nie dzieje się to tak szybko, jakby tego pragnęli teoretycy, bowiem eksperymenty te są niezwykle kosztowne, a przy tym czasochłonne, toteż kolejka do zweryfikowania teoretycznych przewidywań jest długa. Ale się posuwa. W „New Scientist" z 14 października 2017 r. znajdujemy informację, iż

> Two separate teams found the missing matter – comprising particles called baryons – that links galaxies through filaments of hot, diffuse gas. It differs from dark matter, the existence of which still remains a mystery.[20]

Nic więc dziwnego, że obrońcy „baśniowych teorii" coraz śmielej występują w ich obronie. Stephen Howking, np. tak pisze o pewnych zależnościach między równaniami (dualnościach), które pozwoliły dowieść, iż różne teorie strun są w istocie wariantami jednej teorii (teorii M):

> Zlekceważenie tych dualności jako sygnału, że idziemy właściwą drogą, byłoby podobne do sugestii, że to Bóg umieścił skamieniałości w skałach, by skłonić Darwina do przyjęcia błędnej teorii ewolucji życia.[21]

Jest umiarkowanym optymistą w sprawie możliwości empirycznej weryfikacji teorii superstrun:

> Nie dysponujemy jeszcze żadnymi obserwacjami, których wyjaśnienie wymagałoby wprowadzenia dodatkowych wymiarów. Jest jednak możliwe, że zaobserwujemy te wymiary za pomocą Dużego Akceleratora Hadronów.[22]

Podobną sugestię wysuwa Brian Green: „planowane eksperymenty akceleratowe mogą jednak potwierdzić teorię strun"[23].

---

[18] D. Goldberg, *Wszechświat w lustrzanym odbiciu*, przeł. T. Krzysztoń, Prószczyński i S-ka, Warszawa 2015 (cyt. Kindle: *loc. 1784*).

[19] J. Baggot, *op. cit.*

[20] L. Crane, *We've just found half the universe*, "New Scientists" 14 October 2017, s. 8.

[21] S. Howking, *Wszechświat w skorupce orzecha*, przeł. P. Amsterdamski, Zysk i S-ka, Poznań, s. 32.

[22] *Ibidem*.

[23] B. Green, *op. cit.*, s. 461.

Za podsumowanie tej części rozważań niech służy wypowiedź noblisty Franka Wilczka, czynnego uczestnika tego sporu:

> Słynny filozof Karl Popper podkreślał, jak ważna w nauce jest falsyfikacja. […] Reppopizm – przeciwieństwo popperyzmu – głosi, że cechą szczególną dobrej teorii naukowej jest możliwość jej prawdyfikacji. Prawdyfikowalna teoria może się mylić, ale jeśli jest to dobra teoria, na jej błędach można dalej budować. […] Najgorsza teoria to taka, która nawet nie usiłuje być w błędzie – gotowa z takim samym prawdopodobieństwem przewidzieć cokolwiek. […] Posługując się słownictwem reguły jezuitów – lepiej prosić o przebaczenie, niż pytać o pozwolenie – powiedzielibyśmy, że teoria falsyfikowalna pyta o pozwolenie, a prawdyfikowalna prosi o przebaczenie – natomiast teoria nienaukowa w ogóle nie wie, co to grzech.[24]

4.

Niech wstępem do rozważań tej części będzie następująca uwaga Michała Hellera:

> […] fakt, że struktura Wszechświata pozostaje w tak skutecznej odpowiedniości ze strukturami matematycznymi winien być przedmiotem głębokiej refleksji filozoficznej.[25]

Nie sądzę, by ową skuteczność matematyka mogła zawdzięczać koherencji matematycznych teorii czy penetracji platońskiego świata idei. Nawet zdeklarowany platonik Penrose nie wydaje się zbyt konsekwentny i nie twierdzi, iż jej skuteczność ma swe źródło w platońskim świecie idei matematycznych. Poszukuje jej, na przykład, w samej matematyce:

> […] wkraczamy w nową fazę badań w fizyce fundamentalnej, w której kluczowe staje się wymaganie spójności matematycznej, a w sytuacjach, w których tego typu wymaganie […] jest niewystarczające, należy odwoływać się do dodatkowego kryterium elegancji matematycznej.[26]

To nie jedyne wyjaśnienie skuteczności matematyki jakie nam oferuje:

> […] w wielu przypadkach owo pragnienie matematycznej spójności i elegancji prowadzi nas do odkrycia pojęć i struktur matematycznych, które, jak się okazuje, ujmują zagadnienia świata fizyki w sposób głębszy i bardziej rozległy, niż tego początkowo oczekiwaliśmy. Czasem sprawia to wrażenie, jakby sama Natura kierowała się wymogami elegancji i spójności, podobnymi do tych, które sterują matematycznym rozumowaniem.[27]

[24] F. Wilczek, *Lekkość bytu*, przeł. B. Bieniok, E.L. Łokas, Prószyński i S-ka, Warszawa 2011, s. 190.

[25] M. Heller, *op. cit.*, s. 198.

[26] R. Penrose, *Moda, wiara i fantazja w nowej fizyce Wszechświata*, przeł. Ł. Lamża, T. Miller, wstęp i konsultacja naukowa M. Demiański, Copernicus Center Press Sp. z.o.o., Kraków 2017, s. 33.

[27] R. Penrose, *Droga do rzeczywistości*, s. 59.

Jak widać, „natura" nie jest tu biernym odbiciem platońskiego świata idei, ale czynnym graczem w formowaniu fizycznej rzeczywistości. Jeszcze wyraźniej wyraża tę myśl, pisząc o „magii liczb zespolonych":

> [...] sama Natura wykorzystała tę magię w procesie funkcjonowania Wszechświata na jego najgłębszych poziomach.[28]

Wiem, że to metafory, ale Natura, która „kieruje się" czy „wykorzystuje" nie trafiają do mojej wyobraźni. Znalazłam jednak wypowiedź, która jest najbliższa moim intuicjom:

> [...] ta konstrukcja matematyczna była w bardzo wyraźnym sensie już obecna w strukturze świata samego w sobie. Ta matematyczna prostota, lub elegancja, czy jakiegokolwiek słowa chcemy tu użyć, jest autentyczną częścią „sposobu bycia" przyrody; nie jest więc tak, że to tylko nasze umysły są szczególnie wrażliwe na matematyczne piękno.[29]

Też tak uważam. Sądzę, że zamiast poszukiwać sposobu, w jaki Natura „nagina się" do naszych konceptów czy odzwierciedla idealne matematyczne byty, warto rozważyć sytuację odwrotną, w której to nasze umysły kształtowane są przez „Naturę" w ten sposób, że zdolne są w rozmaitości zjawisk dostrzec strukturę zorganizowanej materii będącej podłożem tych zjawisk, strukturę tworzywa Wszechświata. Rozwijanie matematyki nie polegałoby na tworzeniu dowolnych konstrukcji czy penetracji platońskiego świata idei, ale na poszukiwaniu arystotelesowej formy[30] w rzeczach, wzorców, realizowanych w rzeczywistości na tysięczne sposoby. Uniwersalność matematyki brałaby się stąd, iż

> [...] te same ogólne pojęcia matematyczne mogą stosować się do wielu różnych poziomów i do wielu różnych rzeczy.[31]

Byłoby to więc trzecie – obok konstruktywizmu i platonizmu – stanowisko w sporze o status matematyki. Można je chyba nazwać arystotelizmem. Ma ono wielu zwolenników wśród matematyków i przyrodników, chociaż proponowana tu „etykieta" nie pojawia się w dyskusjach. Można do nich zaliczyć np. Einsteina, który wielokrotnie rozważał poznawczą rolę matematyki, w szczególności geometrii – pomijając stanowisko platonizmu – wyróżniał dwie postawy:

> Albo przyjmuje się, iż „ciało" geometrii urzeczywistniane jest w zasadzie przez ciała stałe występujące w przyrodzie [...] albo też zasadniczo zaprzecza się istnieniu przedmiotów odpowiadających podstawowym pojęciom geometrii.[32]

---

[28] *Ibidem*, s. 995.

[29] R. Penrose, *Moda, wiara i fantazja...*, s. 39-40. Ta uwaga odnosiła się do ogólnej teorii względności Einsteina.

[30] Jak pamiętamy Arystoteles w *Metafizyce* wyróżniał cztery różne przyczyny danej rzeczy: materialną, formalną, sprawczą i celową.

[31] I. Stewart, *Liczby natury*, przeł. M. Tempczyk, CIS, Warszawa 1996, s. 114-115.

[32] A. Einstein, *Geometria nieeuklidesowa a fizyka*, [w:] *idem*, Pisma filozoficzne, przeł. K. Napiórkowski, opr. S. Butryn, Wyd. IFiS PAN, Warszawa 1999, s. 67.

Pierwsza to postawa Helmholza, druga – Poincarégo. Einsteinowi bliższe było stanowisko Helmholza. Prezentował je w wielu szkicach. Znajdujemy, na przykład:

> Nasze dotychczasowe doświadczenie pozwala nam mianowicie ufać, iż przyroda jest realizacją tego, co jest najprostsze do pomyślenia pod względem matematycznym. Drogą czysto matematycznej konstrukcji, według mego przekonania, potrafimy znaleźć te właśnie pojęcia i te związki między nimi w postaci praw, które dają nam klucz do rozumienia zjawisk przyrody. […] Doświadczenie pozostaje oczywiście jedynym kryterium użyteczności konstrukcji matematycznej dla fizyki. Właściwa zasada twórcza tkwi jednak w matematyce. W pewnym sensie uważam więc też, że prawdą jest, iż czyste myślenie może uchwycić rzeczywistość, tak jak wymarzyli to sobie starożytni.[33]

Bardzo zdecydowanie forsował taki punkt widzenia nieżyjący już znakomity matematyk Andrzej Lasota. Rozwijając myśl Hugona Steinhausa, iż „przedmiotem matematyki jest rzeczywistość", twierdził:

> […] wierzę, że matematyka jest po prostu strukturą naszego świata. Nie opisem tej struktury, ale samą strukturą. Bez wątpienia matematyk może tworzyć bardzo dziwne obiekty i może mu się wydawać, że daleko odbiegł od rzeczywistości. To tylko pozór. Jeśli jest to dobra matematyka, to okaże się wcześniej czy później, że jest ona fragmentem rzeczywistości. Jeśli zła, to jest tylko zlepkiem złożonym ze strzępów rzeczywistego świata, tak jak sen jest zlepkiem naszych codziennych przeżyć. […] Pytano mnie, czy gdyby świat był inny, to byłaby i inna matematyka. Oczywiście tak. Co więcej, myślę, że gdyby nie było świata, to nie byłoby matematyki – w żadnym sensie.[34]

Michał Heller – choć sympatyzuje z poglądami Lasoty – wskazuje pewne trudności w takim ujmowaniu sprawy:

> Wiele racji zdaje się świadczyć o tym, że matematyka jest bogatsza niż struktura świata. […] Na przykład istnieje nieskończenie wiele geometrii, a tylko „niektóre" z nich – choćby to „niektóre" oznaczało także nieskończoną klasę – znajduje zastosowanie w naukach empirycznych.[35]

Heller sam szkicuje możliwą linię obrony przed takim zarzutem:

> Przypuszczam, że Prof. Lasota odpowiedziałby, że te „niektóre" geometrie odkrywamy w świecie, a pozostałe tworzymy za pomocą czysto formalnych manipulacji.[36]

Myślę, że na sprawę można spojrzeć jeszcze inaczej. Wskazówką może być uwaga Lasoty, iż „[m]atematyka najogólniej rzecz biorąc uczy, że pewne możliwości są wykluczone"[37]. Można więc argumentować, że matematyka wyznacza zakres tego wszystkiego, co jest możliwe, co jest formalnie dopuszczalne. Nasz świat natomiast realizuje jedną z takich możliwości, jeden z dopuszczalnych scenariuszy.

---

[33] A. Einstein, *O metodyce fizyki teoretycznej*, [w:] *idem*, Pisma filozoficzne, s. 115-116.

[34] A. Lasota, *Wprowadzenie do dyskusji: Matematyka a filozofia*, [w:] Otwarta nauka i jej zwolennicy, M. Heller, J. Urbaniec (red.), OBI i Biblos, Kraków – Tarnów 1996, s. 51, 52.

[35] M. Heller, *Czy matematyka jest strukturą świata?*, [w:] *Otwarta nauka*..., s. 64.

[36] *Ibidem*.

[37] A. Lasota, *op. cit.*, s. 52.

Nawet jeśli słuszne, powyższe uwagi są zbyt ogólnikowe, aby mogły kogoś przekonać, że ewolucja wyposażyła nas w zdolność bezpośredniego uchwytywania struktury materii na wszystkich poziomach jej organizacji, a nie tylko w obrębie zjawisk dostępnych w potocznym doświadczeniu. Nikt nie przeczy, że genetycznie matematyka wyrasta z tego doświadczenia, ale dalej rozwija się głównie dzięki wspomnianym „manipulacjom formalnym", których wyniki oceniane są przecież nie na podstawie ich zgodności czy niezgodności ze strukturą rzeczywistości, ale ze względu na wartości epistemiczne, takie, jak: ogólność, spójność, prostota, wreszcie piękno tworzonych konstrukcji. Stymulatorami rozwoju są czasami potrzeby nauk empirycznych, ale zwykle „manipulacje" wymuszane są wewnętrznymi problemami matematyki. Początki teorii liczb zespolonych sięgają połowy XVI w. Ich własności były owocnie badane przez 350 lat, zanim okazało się, że „[p]rzyroda […] oddała w ich władanie precyzyjne operacje swego świata w najbardziej mikroskopijnej skali"[38].

Oryginalną próbę argumentacji na rzecz realizmu w duchu naturalistycznym podjął Grzegorz Białkowski w szkicu *Uwarunkowania podmiotowe procesu poznawczego w fizyce*. Sugeruje on, że wartości epistemiczne i związane z nimi dyrektywy metodologiczne, decydujące o kierunku poszukiwań w fizyce, a zatem także kryteria akceptacji i wyboru teorii czy hipotez warunkowane są przekazywanymi genetycznie cechami biopsychicznymi właściwymi „całemu w zasadzie gatunkowi ludzkiemu"[39]. Wymienia wiele czynników kształtujących owe cechy biopsychiczne od jedności materialnej, strukturalnej i funkcjonalnej z otoczeniem i świadomości tej jedności, przez specyficzną postać naszego aparatu zmysłowego i motorycznego oraz strukturę władz psychicznych, aż po charakter więzi społecznych. Analizuje kryteria mniej (np. sprawdzalność empiryczna, predyktywność) lub bardziej uwarunkowanych podmiotowo, a wśród tych ostatnich szczególną uwagę zwraca na kryterium p i ę k n a .

> Jednym z dominujących elementów, które charakteryzują „piękne" teorie jest zawarty w nich element symetrii, harmonii, podobieństwa, analogii. Nie to jest może najbardziej dziwne, że teorie takie podobają się tym, którzy są w stanie je zrozumieć, ale to, że odzwierciedlają one porządek ukryty w samej przyrodzie.[40]

5.

Na koniec poświęćmy chwilę uwagi problemowi m i a r y . Frank Wilczek cofa nas do czasów Pitagorasa, aby przypomnieć dowód Hippazosa obalający twierdzenie

[38] R. Penrose, *Droga do rzeczywistości*, s. 71.

[39] G. Białkowski, *Uwarunkowania podmiotowe procesu poznawczego w fizyce*, „Zagadnienia Naukoznawstwa", 1-2, 1981, s. 13.

[40] *Ibidem*, s. 25.

Pitagorasa! Było to możliwe jedynie w czasach, gdy ludzkość dysponowała tylko liczbami naturalnymi.

> Z punktu widzenia logiki poprawnym wnioskiem jest w tym wypadku stwierdzenie, że w takim świecie nie można skonstruować dokładnych równoramiennych trójkątów prostokątnych. Coś musi się choćby trochę nie zgadzać. Być może kąt „prosty" będzie się nieznacznie różnił od wartości 90^{o}, oba krótsze boki nie będą doskonale równe albo […] boki trójkąta nie będą doskonale proste.[41]

Grecy w owym czasie nie wiedzieli, że istnieje coś takiego jak $\sqrt{2}$. A w naszym świecie? Co z *konstruowanymi* przez nas równobocznymi trójkątami prostokątnymi? $\sqrt{2}$ jest przecież liczbą niewymierną! A z okręgami? – skoro ta „[p]odziwu godna liczba Pi […] przynagla […] gnuśną wieczność do trwania"[42]?

Problem ten rozważał Einstein:

> […] pytanie o prawomocność lub nieprawomocność geometrii euklidesowej ma jasny sens. Geometria euklidesowa, i w ogóle geometria, zachowuje wprawdzie jak poprzednio charakter nauki matematycznej, dlatego iż w dalszym ciągu wyprowadza się jej twierdzenia z aksjomatów drogą czysto logiczną, staje się jednak jednocześnie nauką przyrodniczą przez to, iż aksjomaty zawierają stwierdzenia o obiektach przyrody, o trafności których (stwierdzeń) rozstrzygnąć może tylko eksperyment. Musimy jednak zawsze być świadomi, że idealizacja polegająca na fikcji sztywnego ciała (mierniczego) jako przedmiotu przyrody może pewnego dnia okazać się niestosowalna lub stosowalna tylko w stosunku do pewnych zjawisk przyrody. Ogólna teoria względności wykazała niestosowalność tego pojęcia dla przestrzeni o takich rozmiarach, które nie są małe w sensie astronomicznym. Teoria elektrycznych kwantów elementarnych mogłaby wskazać na niestosowalność tego pojęcia dla rozmiarów rzędu atomowego.[43]

To, że na różnych poziomach organizacji materii musimy stosować różne narzędzia badawcze, wydaje się oczywiste, ale zasadnicze znaczenie ma budowanie nowych matematycznych modeli przyrody – „potwierdzona obserwacjami dokładność teorii grawitacji Newtona wynosi mniej więcej $1:10^7$. Poziom precyzji ogólnej teorii względności $1:10^{14n}$".

Faktem jest też, że precyzja pomiarów stale rośnie. Detekcja fal grawitacyjnych była możliwa, bowiem

> […] precyzja tych pomiarów znacząco wykracza – o czynnik rzędu […] sto milionów lub więcej – ponad to, co można było obserwacyjnie uzyskać w czasach Einsteina, gdy sformułował on swoją teorię grawitacji.[44]

Jednak każdy, kto dokonywał pomiarów jakiejś wielkości (np. w laboratorium), wie, że otrzymany wynik zawsze ma formę: x ± D*x*, gdzie D*x* jest szacowaną wedle określonego klucza *niepewnością pomiarową*. Gdyby więc nawet teorie idealnie opisywały rzeczywistość, nasze możliwości potwierdzenia tego są zawsze

---

[41] F. Wilczek, *Piękne pytanie*, s. 31.

[42] W. Szymborska, *Liczba Pi*, [w:] *eadem*, Wiersze wybrane, Wydawnictwo A5, 2007.

[43] A. Einstein, *Geometria nieeuklidesowa a fizyka*, s. 68.

[44] Ibidem.

ograniczone. Nie sposób jednak zaprzeczyć, że sukcesy przyrodników w trafnym opisywaniu świata, potwierdzane dokonaniami inżynierów, których projekty opierają się na tych opisach, stanowią dodatkowy argument na rzecz niesprzeczności podstawowych teorii matematycznych, „wzmacniający dedukcyjne doświadczenie wielu pokoleń matematyków", o którym pisał Grzegorczyk.

Elżbieta Kałuszyńska

Number, Size, Measure

Abstract

In this article, I tackle the problem of the ontological status of mathematics. I dispute the positions of two schools of thought; namely, the Platonists (for example, Roger Penrose, who places the subject of mathematics in his Platonian world of mathematical ideas), and the constructionists (such as John Stewart, for whom the whole mathematics consists of abstractions). Mathematics – in my view – consists in a search for the Aristotelian form in reality, which explains its unique and the otherwise unbelievable effectiveness in describing the world. This latter quality cannot be explained on the basis of the two positions I criticize.

Keywords: mathematics, Platonism, Constructivism, Aristotelianism.